# Standart Normal Dağılım:

$X$, t.d. $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımına sahip olsun. $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ değişken değişikliği yapılarak elde edilen yeni $Z$ değişkenine standart normal değişken denir ve

$Z \sim N(0,1)$ dağılımına sahiptir.

$$E(Z) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} E(X) - \mu = \frac{1}{\sigma}(\mu-\mu) = 0$$

$$V(Z) = V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot V(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$ bulunur.

$Z$' t.d. nin o.y.f. nu

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} & , -\infty < z < \infty \\ 0 & , \text{ d.h.} \end{cases}$$

olup, $f(z)$'ye standart normal dağılım fonk. denir. Bütün normal dağılımları standart normal dağılıma dönüştürmek mümkün olduğundan bu dağılımın birikimli dağılım değerleri tablo haline getirilmiştir.

$Z$ ile ilgili değişkenler ilgili aralıkta $f(z)$'nin integraline eşittir. Söz gelimi,

$$p(0 < z < z_0) = \int_0^{z_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$ veya

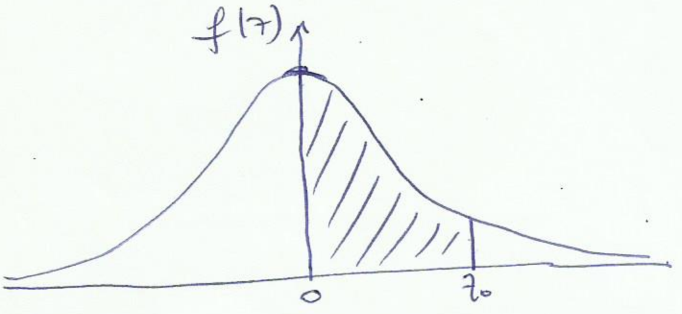
$$p(z \leq z_0) = \int_{-\infty}^{z_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

integralini hesaplamak için standart normal dağılımla ilgili tablolar düzenlenmiştir.

Birikimli dağılım fonk.nu.

$$p(z\le z_0)=F(z) = \int_{-\infty}^{z_0} f(t).\,dt = \underline{\Phi(z_0)}$$ tablo değeri

olmak üzere




## Özellikleri

1. Eğri y eksenine göre simetriktir.
2. $f(z)$ fonksiyonunun $(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$ noktası max. noktasıdır.
3. $f(z)$ eğrisinin yatayla oluşturduğu alan sıfırın sağında ve solunda 0.5 olmak üzere eşittir.
4. $p(z \le z_0) = \Phi(z_0)$ olmak üzere; $\Phi(-z_0) = 1 - \Phi(z_0)$
5. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ olmak üzere

$$p(a < x < b) = p\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= p(z_1 < z < z_2)$$
$$= \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$$ olur.

## Örnek

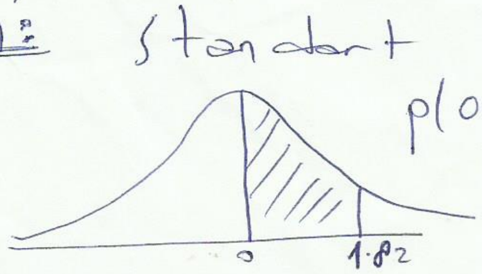
$Z \sim N(0,1)$ ise aşağıdaki olasılıkları hesaplayınız.

a.) $p(0 < z < 1.82)$ , b.) $p(z \le 2.5)$ , c.) $p(1 < z < 2.5)$

d.) $p(-1.6 < z < 2.3)$ , e.) $p(z < 0.96)$

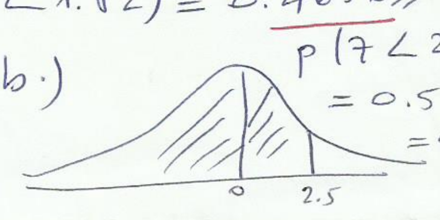
**Çözüm:** Standart normal eğri

a.)




$p(0 < z < 1.82) = 0.4656$

b.)




$p(z < 2.5)$
$= 0.5 + p(0 < z < 2.5)$
$= 0.5 + 0.4938$
$= 0.9938$

- 71 -

## — Uygulama —

**Örnek**: Bir fabrikada üretilen boruların çapları ortalaması $\mu = 10$ cm ve standart sapması $\sigma = 0,1$ cm. olan Normal dağılım göstermektedir. Piyasa standartlarına göre çapların $(9.9 - 10.2)$ arasında olması gerekmektedir. Üretimin yüzde kaçı standartlara uygundur.

**Çözüm**: X : Fabrikada üretilen boruların çapı olsun.

$X \sim N(10;\ 0,01)$ dağılımına sahiptir.

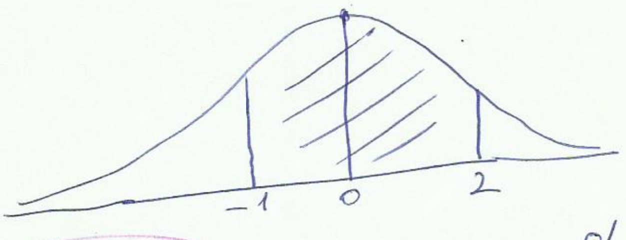
$$P(9.9 < X < 10.2) = P\left(\frac{9.9-10}{0.1} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{10.2-10}{0.1}\right)$$

$$= P\left(-\frac{0.1}{0.1} < Z < \frac{0.2}{0.1}\right) = P(-1 < Z < 2)$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-1) = 0.9772 - 0.1587$$

$$= 0,8185$$

$$= \%81.85$$




**Yorum**: Üretimin yaklaşık %81.85'i standartlara uygundur.

**Örnek**: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ olmak üzere,

a.) $P(|X-\mu| < \sigma)$

b.) $P(|X-\mu| < 2\sigma)$ olasılıklarını hesaplayıp sonucu yorumlayınız.

**Çözüm**: a.) Bütün normal dağılımlar st. normale dönüştürülebildiğinden, öncelikle bu işlemi yapalım.

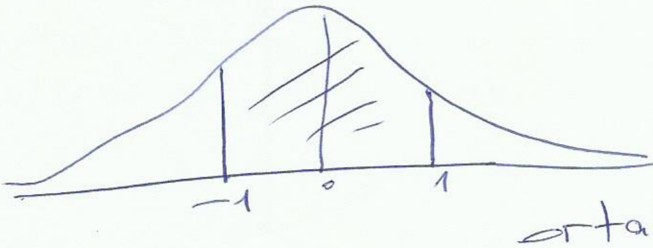
$$P(|X-\mu| < \sigma) = P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$$

$$= p\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= p(-1 < z < 1) = 2.\,p(0 < z < 1)$$

$$= 2.\,(0,3413)$$

$$= 0.6826$$




Bir normal dağılımda ortalamanın sağında ve solunda birer standart sapma gidildiğinde oluşan aralığın t.d.yi içerme olasılığı %68.26 dır.

b.) Benzer şekilde;

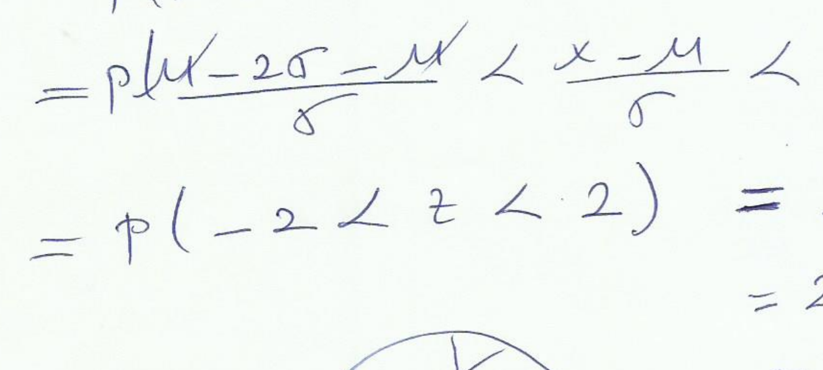
$$p(|X-\mu| < 2\sigma) = p(\mu-2\sigma < X < \mu+2.\sigma)$$

$$= p\left(\frac{\mu-2\sigma-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{\mu+2\sigma-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= p(-2 < z < 2) = 2.\,p(0 < z < 2)$$

$$= 2.\,(0,4772)$$

$$= 0,9544$$




Normal dağılımda ortalamanın sağında ve solunda ikişer st. sapma gidildiğinde oluşan aralığın t.d.yi içerme olasılığı %95.44'dür.

**Örnek:** Bir sınıftaki öğrencilerin Olasılık-I dersinden aldıkları Vize notlarının $\mu = 63$ ve $\sigma = 6$ olan normal dağılım gösterdiği biliniyor. Sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin Vize notunun 75'den fazla olması olasılığı nedir? Sınıf mevcudu 80 ise kaç öğrencinin vize notu 60 – 75 arasındadır

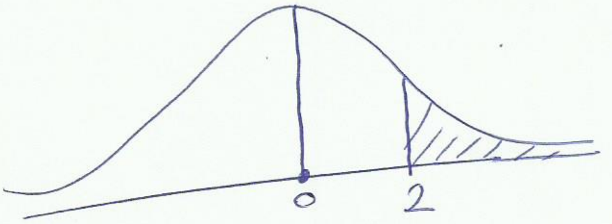
Çözüm : X : Öğrencinin Olasılık-I dersi vize notu olsun.

$X \sim N(63 ; 36)$ dağılımına sahiptir.

$P(X > 75) = ?$

$\Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{75-63}{6}\right) = P(Z > 2)$

$= 1 - P(Z < 2)$



$= 1 - [0.5 + P(0 < Z < 2)]$

$= 1 - [0.5 + 0.4772]$

0,0668

$= 0.0228 = \%2.28$

Öğrencilerin %02.28'i 75'in üzerinde not almıştır.

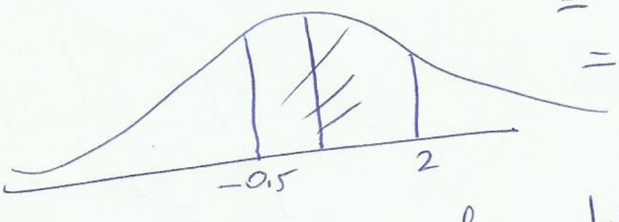
$P(60 < X < 75) = P\left(\frac{60-63}{6} < Z < \frac{75-63}{6}\right)$

$= P(-0.5 < Z < 2)$

$= P(0 < Z < 0.5) + P(0 < Z < 2)$

$= 0.1915 + 0.4772$

$= 0.6687 = \%66.87$



100 66,87
80 ?
≅53

Buna göre 80 kişilik sınıfta;

$80 \times (0.6687) = 53,496 \cong 53$ kişinin Olasılık-I vize notu 60 ile 75 arasındadır.

Ödev dışı

II Örnek : Bir grup erkek öğrencinin ağırlıklarının normal dağılım gösterdiği biliniyor. Bu öğrencilerin %60'ının ağırlığı 60 kg'ın altında, %20'sinin ağırlığı da 80 kg'ın üzerindedir. Buna göre dağılımın ortalama ve varyansını bulunuz.

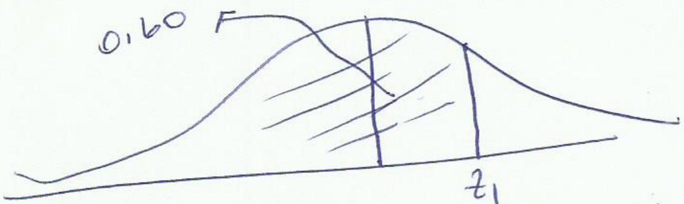
Çözüm : X: Gruptaki bir öğrencinin ağırlığı olsun.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ bilinmiyor.

Tablo değerinden yararlanabilmek için dağılımı standartlaştıralım. $p(X_1 < 60) = 0{,}60$

$X_1 = 60$ için $p\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \underbrace{\frac{60-\mu}{\sigma}}_{z_1}\right) = 0{,}6$

$\Rightarrow p(z < z_1) = 0{,}60$




$\Rightarrow 0.6 = 0.5 + \Phi(z_1)$

$\Rightarrow \Phi(z_1) = 0.1$

dolayısıyla tablodan $z_1 = 0{,}25$ bulunur.

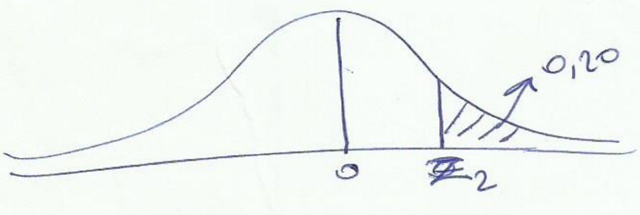
$\Rightarrow \frac{60-\mu}{\sigma} = z_1 = 0.25$

$\Rightarrow 60 - \mu = 0.25 \cdot \sigma \quad \ldots (1)$

$p(X_2 > 80) = 0{,}20$

$X_2 = 80$ için $p\left(\frac{X_2-\mu}{\sigma} > \frac{80-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}20$

$\Rightarrow p(z > z_2) = 0{,}20$




$\Rightarrow 0{,}20 = 0.5 - \Phi(z_2)$

$\Rightarrow \Phi(z_2) = 0{,}3$

böylece tablodan $z_2 = 0{,}84$ bulunur.

$\Rightarrow \frac{80-\mu}{\sigma} = z_2 = 0{,}84$

$80 - \mu = 0{,}84 \cdot \sigma \quad \ldots (2)$

(1) ve (2) çözülürse; $\sigma = 33{,}89$, $\mu = 51{,}52$ bulunur.